COMPRENSIÓN DEL USO DE LAS HERRAMIENTAS TEÓRICAS Y OPERATORIAS EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Conference Paper · December 2018

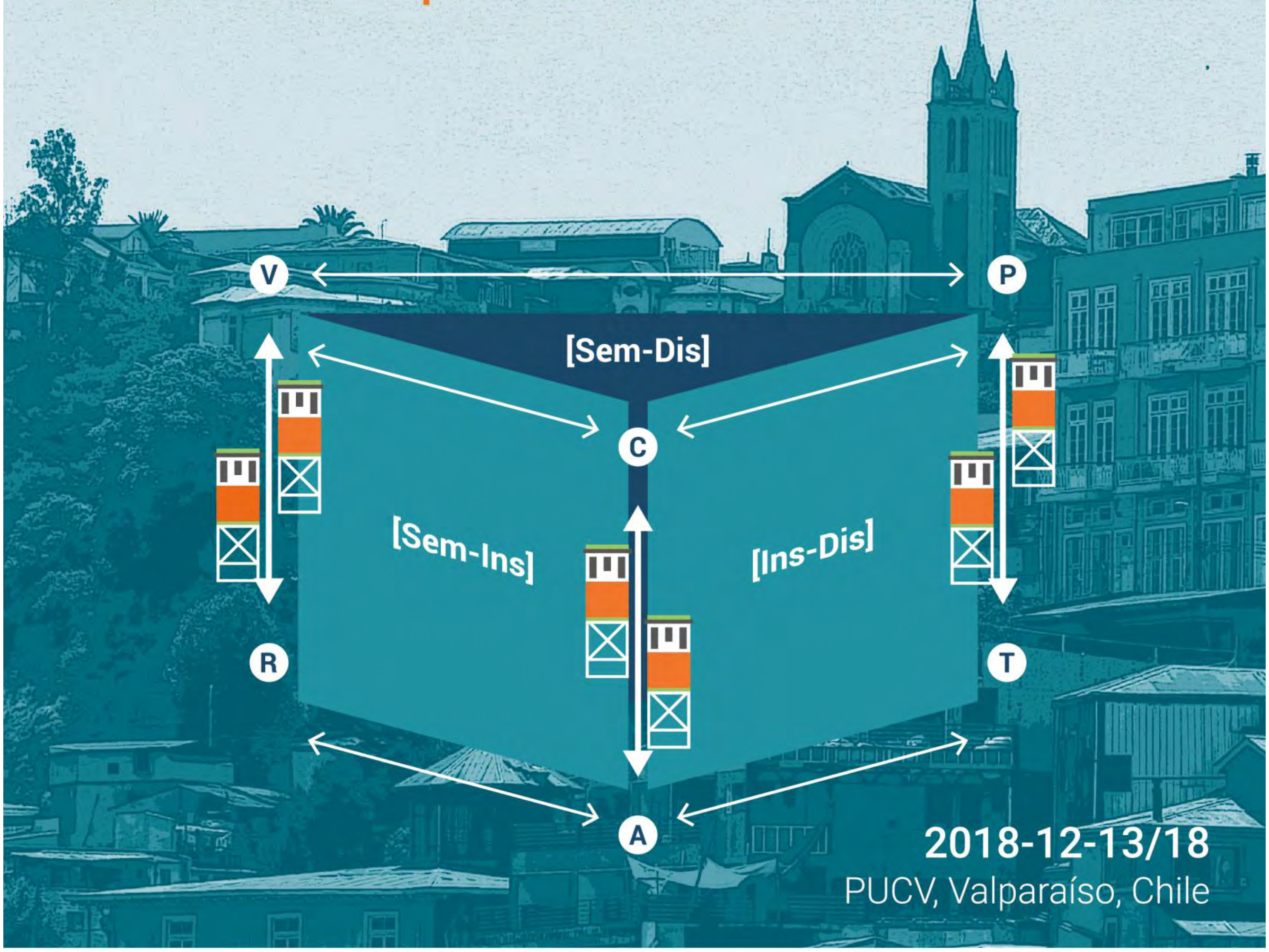
2 authors:


Paula Verdugo-Hernández
Universidad del Bío-Bío, Chillán, Chile


Gonzalo Espinoza-Vásquez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

ETM6
Symposium/Symposium/Simposio

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique
Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático
Sixth Symposium on Mathematical Work



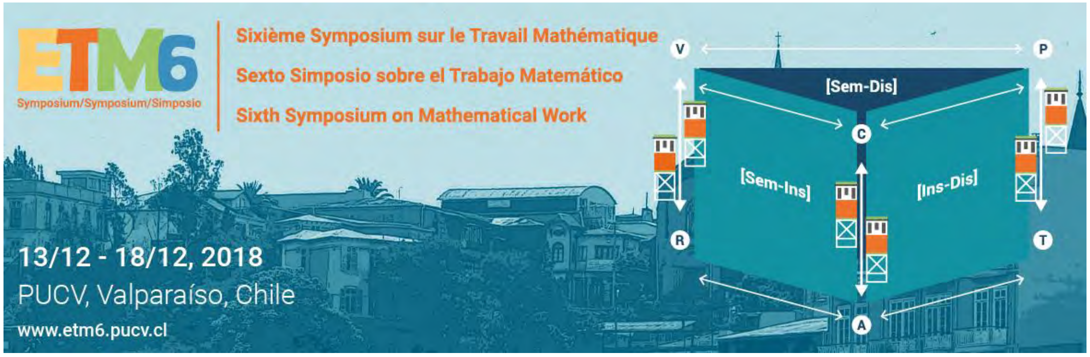
2018-12-13/18
PUCV, Valparaíso, Chile

ACTAS ETM 6 | ACTES ETM 6 | PROCEEDINGS ETM 6

www.etm6.pucv.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Inés Mª Gómez Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Denis Tanguay
Laurent Vivier (Eds)



Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sixth Symposium on Mathematical Work

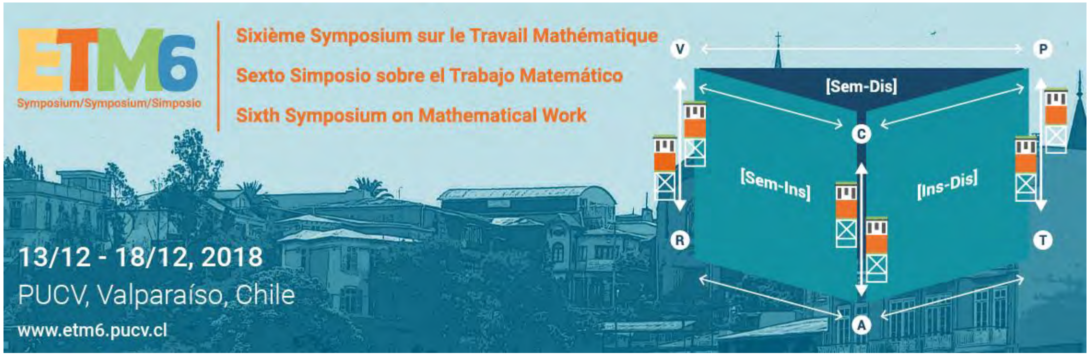
Del 13 al 18 de diciembre 2018

Du 13 au 18 décembre 2018

December, 13 – 18, 2018

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO



Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sixth Symposium on Mathematical Work

Del 13 al 18 de diciembre 2018

Du 13 au 18 décembre 2018

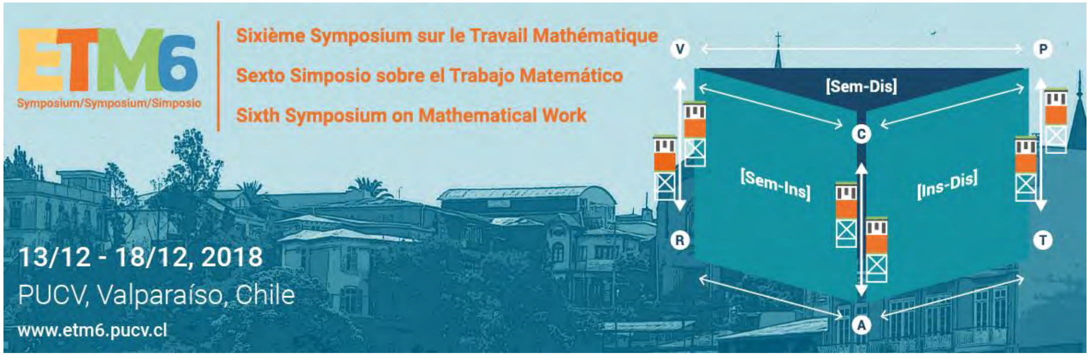
December, 13 – 18, 2018

Editores

Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Editor Jefe)
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Denis Tanguay

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas
Av. Brasil 2950, Valparaíso
2340000– Valparaíso
Chile

PONTIFICIA
UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE
VALPARAÍSO



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Editores

Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Editor Jefe)
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Denis Tanguay

Diseño

Elizabeth Montoya Delgadillo, Philippe R. Richard, Laurent Vivier

Diseñadora

Camila Valenzuela Rojo

ISBN: 978-956-401-498-2

Impreso en Chile

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS IMA PUCV

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

COMPRENSIÓN DEL USO DE LAS HERRAMIENTAS TEÓRICAS Y OPERATORIAS EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Paula Verdugo-Hernández[a] y Gonzalo Espinoza-Vásquez[b]

[a]Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

paulaverdugo@unach.cl y gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Este trabajo considera los marcos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para estudiar la relación entre el uso de las herramientas teóricas y operacionales y el conocimiento de la estructura de las matemáticas. Para ello se estudia una tarea propuesta y desarrollada por un profesor universitario, en la cual el uso de teoremas permite evidenciar el conocimiento movilizado por la actividad matemática que requiere su resolución. Concluimos que la complementariedad entre los subdominios del MTSK y componentes del ETM permite describir cómo el profesor utiliza dichas herramientas y cuál es el rol de ellas dentro de su conocimiento especializado.

***Palabras clave**: ETM, MTSK, Herramientas, Conexiones, Sucesiones de números reales.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión de un fenómeno depende de la óptica con que este se observe o, en el caso de las investigaciones, el marco teórico que se elija para su estudio. En ese sentido, la complementación entre distintos enfoques podría proveer una visión global del fenómeno de acuerdo a los elementos teóricos que se consideren (Godino et al., 2013). La vinculación entre teorías permite dar una perspectiva amplia del fenómeno o robustecer el análisis de tareas que se realice del mismo. Por ejemplo, para conseguir la conexión entre teorías, Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) muestran diferentes estrategias que permiten establecer dicha conexión, entre ellas la estrategia de combinar diferentes elementos de las teorías para realizar dicho vínculo.

Los marcos teóricos que consideramos en este trabajo corresponden al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) y al Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que buscan comprender el conocimiento del profesor de matemáticas y la actividad matemática en el desarrollo de un problema, respectivamente. Ambos marcos, aunque poseen orientaciones diferentes, han sido utilizados de manera conjunta en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas (e.g., Espinoza-Vásquez, 2016; Flores-Medrano et al., 2016; Vasco et al., 2016; Zakaryan, Ribeiro y Espinoza-Vásquez, 2016) avanzando en las líneas propuestas por cada marco mediante la combinación de sus elementos al momento de realizar los análisis. Existen varios trabajos que buscan establecer relaciones y conexiones entre el MTSK y el ETM (ver Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis, Philippe y Vivier, 2016). En ellos se postula que el estudio de estas relaciones posibilita profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que este conocimiento sustenta en un esquema más amplio en el cual se incorpora el saber sabio y los espacios de trabajo personales de los estudiantes, así como las diferencias entre planos y génesis.

Por ejemplo, el trabajo de Vasco et al. (2016) estudia el conocimiento especializado de un profesor universitario sobre el álgebra lineal y el espacio de trabajo matemático ETM idóneo durante una sesión de clases sobre la multiplicación de matrices. El conocimiento evidenciado permite explicar las génesis que el profesor privilegia en el trabajo matemático que propone. Los autores concluyen que "el MTSK del profesor parece explicar en parte el trabajo matemático que propone en el aula, esto es, el ETM idóneo del profesor" (p. 236). Así, el análisis con ambos marcos ayuda a comprender de mejor manera la actividad matemática que propicia el profesor y cómo se explica a partir de la comprensión de su conocimiento.

Ambos marcos permiten analizar la actividad matemática del profesor; el ETM desde la óptica del ETM idóneo del profesor y el MTSK desde el conocimiento especializado que sustenta dicha práctica (e.g., Flores-Medrano et al., 2016; Vasco et al., 2016) o centrándose en uno de los ETM del profesor – personal o idóneo- y en subdominios particulares del MTSK (e.g., Zakaryan et al., 2016; Espinoza-Vásquez, Ribeiro y Zakaryan, 2018). Se observa que el profesor es uno de los elementos que permite la articulación entre estos marcos (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016). Por ejemplo, el trabajo de Flores-Medrano et al. (2016) muestra cómo el análisis de la práctica de aula del profesor desde la perspectiva de ambos marcos permite comprender mejor la actividad matemática que propicia el profesor y cómo se puede interpretar desde su conocimiento especializado. No obstante, son pocos los trabajos que abordan la relación más estrecha entre los componentes del ETM y las categorías de los subdominios del MTSK (e.g., Espinoza-Vásquez, 2016), quedando abierta la línea de investigación que profundiza en el estudio de componentes particulares entre ambos marcos.

En el presente trabajo intentaremos abordar la relación entre los componentes de ambos marcos respecto de la función que cumplen las herramientas, teóricas y operacionales, en el ETM y cómo estas se pueden visualizar desde el MTSK para comprender la actividad matemática que busca propiciar el profesor, siguiendo una de las líneas reveladas en Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis et al. (2016).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El MTSK surge como un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática (Carrillo et al., 2013) y propone una conceptualización para el conocimiento del profesor de matemáticas que considera tres dominios: el Conocimiento de la Matemática (*Mathematical Knowledge* - MK[1]) con los subdominios para el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas y el conocimiento de la práctica matemática; el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK[1]) con los subdominios para el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas; y el dominio de las Creencias sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje. La inclusión de este dominio pretende generar interpretaciones cada vez más precisas de estas prácticas, pues pese a no ser vistas como conocimiento se considera que ellas permean a todos los subdominios e influencian la práctica de aula del profesor (Carrillo et al., 2018). A continuación, se describen sucintamente los subdominios que conforman los dominios MK que serán utilizados en nuestro análisis. Estas definiciones fueron extraídas de Flores-Medrano et al. (2016).

El dominio del Conocimiento Matemático abarca el conocimiento del profesor de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar y contempla lo siguiente:

Conocimiento de los Temas (KoT[1]): Describe el qué y el cómo el profesor de matemática conoce las temáticas que enseñará. El KoT considera las conexiones intra-conceptuales que tienen lugar en la proximidad de un objeto y las conexiones que permiten, por ejemplo, vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes formas de concebir un mismo concepto. Abarca aspectos fenomenológicos y aplicaciones, definiciones, propiedades y sus fundamentos del tema, así como los registros de representación y procedimientos.

Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM[1]): Corresponde al conocimiento del profesor de las relaciones entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), ya sean del curso que está impartiendo o del tema de estudio con contenidos de otros cursos o niveles educativos, no como su organización curricular sino que desde una perspectiva de la temporalidad y delimitación del concepto; se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos (Carrillo et al., 2014). El KSM considera el conocimiento de conexiones que dan una visión secuenciadora del tema que permiten relacionar los contenidos actuales con contenidos anteriores (temporalidad): las **conexiones de simplificación** dan una visión de la matemática avanzada desde una perspectiva elemental, o relacionan los contenidos actuales con contenidos posteriores; las **conexiones de complejización** dan una perspectiva avanzada de la matemática elemental. El KSM también incluye el conocimiento de conexiones que identifican la amplitud del

---

[1] Las siglas utilizadas en el modelo corresponden a los nombres de los dominios y subdominios en ingles debido a que la primera presentación del modelo fue en un congreso internacional de habla inglesa.

MK: Mathematical Knowledge
KoT: Knowledge of Topics
KSM: Knowledge of the Structure of Mathematics
KPM: Knowledge of Practice in Mathematics

concepto (delimitación): el conocimiento sobre **conexiones transversales** que son las conexiones entre contenidos que posean alguna propiedad común o que los modos de pensamiento asociados a ellos contemplen una misma idea central, y las **conexiones auxiliares** del concepto con otro que sirva de ayuda en su tratamiento sin ser parte de las cualidades o red conceptual del objeto de estudio.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM[1]): comprende el conocimiento de las características de la práctica matemática sobre cómo proceder y generar conocimiento en matemáticas. Incluye el conocimiento sobre las prácticas relacionadas a la matemática en general y el conocimiento sobre las prácticas relacionadas a una temática en particular.

La división en dominios y subdominios expuestos es con fines analíticos pues éstos se presentan en forma integrada, esto es, se espera observar distintos subdominios simultáneamente durante la práctica del profesor.

Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) tiene por objetivo principal modelizar el trabajo matemático en un contexto educativo, con el fin de favorecer y mejorar las condiciones en las cuales se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para definir el ETM se introducen dos planos horizontales, el plano epistemológico y el plano cognitivo, los cuales a su vez se dividen en 3 polos. El plano epistemológico está constituido por los polos del referencial (formado por las propiedades, teoremas y definiciones), el representamen (signos semióticos), y artefactos (materiales o simbólicos). El plano cognitivo está constituido por los polos de visualización, construcción y prueba. Ambos planos están conectados mediante distintas génesis:

- Una *génesis instrumental* que permite hacer operatorios a los artefactos en el proceso constructivo.
- Una *génesis semiótica* basada en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETM su estatus de objetos matemáticos operatorios.
- Una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

Es importante señalar que el ETM no debe ser visto como la unión de las componentes de ambos planos, sino que más bien como articulaciones activadas por al menos dos génesis. De este modo, según Kuzniak y Richard (2014), el Espacio de Trabajo Matemático cuenta con tres planos verticales, los cuales se activan por medio de una determinada tarea, cada uno definido por la presencia de dos génesis: Semiótico-Instrumental [Sem-Ins]; Semiótica-Discursiva [Sem-Dis] e Instrumental-Discursiva [Ins-Dis] (Kuzniak y Richard, 2014).

Se identifican tres tipos de ETM: el ETM de referencia, del cual depende la organización esperada del espacio de trabajo, el que se define sólo sobre la base de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que consiste en el acondicionamiento y organización del ETM de referencia, con el fin de convertirlo en un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución educativa dada con una función definida; el ETM personal, que reside en la manera en que el ETM idóneo es utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada individuo se apropia y ocupa su propio ETM personal con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas (Kuzniak, 2011). Además, se deben considerar los siguientes tres paradigmas:

- **Análisis-Geométrico/Aritmético** (AG), que permite interpretaciones, con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.
- **Análisis-Calculatorio** (AC) en el que las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
- **Análisis-Real** (AR) caracterizado por un trabajo que considera la aproximación y abiertos, incluso lo topológico; definiciones y propiedades son establecidas teóricamente permitiendo un "trabajo ε" específico de este paradigma cotas, desigualdades, "lo despreciable".

También se utilizará el término de *herramienta* (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016) para referirnos a aquellas componentes del plano epistemológico que tienen un uso potencial para resolver un problema dado. En particular, utilizaremos las *herramientas teóricas* (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016) que sirven para el razonamiento basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos, las cuales pertenecen al referencial de la tarea que deseamos resolver, por ejemplo, en el referencial de las sucesiones se puede decir que los criterios de convergencia corresponden a este tipo de herramientas. Asimismo, utilizamos el término *herramientas operatorias* (Verdugo-Hernández, 2017) para referirnos a aquellas que se requieren para resolver cierta tarea, pero que no forman parte del referencial teórico al cual pertenece dicha tarea. Por ejemplo, para abordar una demostración de convergencia podríamos requerir aplicar propiedades del orden de los números reales.

A partir de lo anterior, consideramos la pregunta: ¿Cuál es la función de las herramientas teóricas y operacionales en el ETM y cómo pueden ser comprendidas desde el conocimiento de conexiones en el MTSK?, abordando una de las líneas abiertas de investigación declaradas en (Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis et al., 2016) sobre los subdominios o elementos de MTSK que parecen ser influyentes en la construcción de los ETM variados.

METODOLOGÍA

En este trabajo, estudiamos la ejecución de una tarea matemática por parte de un profesor a la luz del ETM y del MTSK. Para ello adoptamos un paradigma interpretativo bajo una metodología de corte cualitativa (Denzin y Lincon, 2000). Se trata de un estudio de caso del tipo instrumental (Stake, 2007), en el que el sujeto de estudio es un profesor universitario con grado de magister y doctor en matemática, con más de 10 años de experiencia en docencia universitaria. Al momento de la investigación, el profesor ejercía docencia en un curso de Cálculo Integral en el que enseña, entre otros, el tema de sucesiones. Este curso se ubica en un segundo año de una carrera universitaria en Chile.

Los datos de esta investigación son parte de la tesis doctoral de Verdugo-Hernández (2017). De entre ellos se ha extraído un instrumento de evaluación propuesto por el profesor participante del estudio, que pretende medir el grado de comprensión de los estudiantes sobre el tema de sucesiones. De esta evaluación hemos seleccionado una pregunta junto con la respuesta experta del profesor. La selección de esta pregunta y respuesta se basa en que estas aportan evidencias acerca del uso de las herramientas desde la perspectiva del ETM y es factible observar el conocimiento especializado del profesor en el dominio del Conocimiento Matemático.

El análisis de la pregunta y su desarrollo se ha realizado considerando los tipos de herramientas: teórica y operacional, que se definen desde el ETM en relación al dominio del conocimiento matemático del modelo MTSK debido a que en él se considera el conocimiento de conexiones entre conceptos matemáticos.

Complementariedad entre ETM y MTSK

El profesor propone un problema sobre sucesiones, basado en un referencial propio de este objeto matemático, utilizando las nociones de acotamiento y monotonía, activando de manera general el plano [Sem-Dis]. Por otro lado, prevalece el paradigma AC debido a las nociones involucradas que son propias del análisis.

Una de las riquezas de esta tarea, es que el docente induce a aproximar $\sqrt{a}$ (la sucesión converge a $\sqrt{a}$), resaltando la aplicación de las sucesiones que consiste en la aproximación de números reales, aspecto que es fundamental en el estudio de éstas. (Verdugo-Hernández, 2017). Lo anterior evidencia que el docente insta a los estudiantes a realizar un trabajo en el dominio del Análisis, posicionado en el paradigma AC y con elementos del paradigma AR, lo que se observa en la idea de aproximación.

A continuación, presentamos la pregunta propuesta por el docente a sus estudiantes y el desarrollo realizado por él mismo, evidenciando la forma en la cual esperaría que sus estudiantes respondan.

PREGUNTA: Para $a > 0$ y $s_1 > 0$ se define la suceción (s_n) mediante la recurrencia:

$$s_{n+1} = \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} \forall\, n > 1$$

a) Demuestre que la sucesión (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
b) Demuestre si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
c) Usando las partes anteriores, concluya que si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es decreciente y acotada inferiormente.
d) Concluya que la sucesión (s_n) es convergente y calcule su límite.

Tabla 1: Encabezado de la pregunta propuesta por el profesor.

En la Imagen 1 se observa que el profesor presenta la equivalencia entre dos características de la sucesión (monotonía y acotamiento). En términos del ETM, se evidencia la utilización de herramientas operacionales como las propiedades de las desigualdades de los números reales y la relación de orden. Asimismo, se observa el uso del principio de inducción matemática para probar que la sucesión es acotada inferiormente por cero. En términos del MTSK, es posible observar el conocimiento del profesor sobre la resolución de inecuaciones y el rol de la simbología en la comunicación de su argumento cuando incluye la equivalencia entre las líneas escritas o el cuantificador universal para indicar que la propiedad es válida en todo el conjunto de los naturales. También se observa el conocimiento sobre de conexiones auxiliares entre la función raíz cuadrada como operador que preserva el orden y la sucesión cuando emplea las propiedades de la raíz en la demostración.

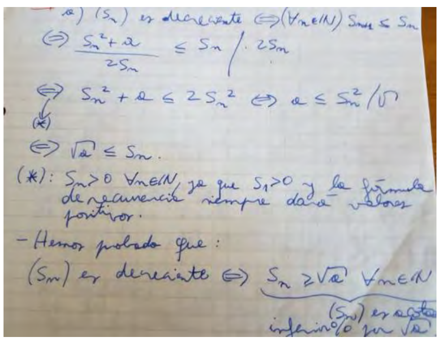


Imagen 1: Resolución parte *a*)

Transcripción Imagen 1:

a) (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})\ s_{n+1} \leq s_n$

$\Leftrightarrow \frac{s_n{}^2+a}{2s_n} \leq s_n / 2\, s_n$

$\Leftrightarrow s_n{}^2 + a \ \leq 2s_n{}^2$

$\Leftrightarrow a \ \leq s_n{}^2 \ / \ \sqrt{}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} \ \leq s_n$

(*): $s_n \ > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ya que $s_1 \ > 0$ y la fórmula de recurrencia siempre dará valores positivos.

- Hemos probado que:

(s_n) es decreciente $\Leftrightarrow \underbrace{s_n \geq \sqrt{a}\ \forall\, n \in \mathbb{N}}_{(s_n)\text{ es acotado inferiormente por } \sqrt{a}}$

Imagen 1: Resolución parte a) y transcripción.

En la Imagen 2, se puede observar que nuevamente el profesor recurre al principio de inducción como ayuda en la demostración del acotamiento de la sucesión. En esta sección también se observa el rol de los conectores lógicos como símbolos que le permiten al profesor estructurar la demostración como es el caso de las equivalencias e implicaciones utilizadas. Puesto que el principio de inducción no es un concepto asociado directamente a las sucesiones, su uso por parte del profesor es interpretado como conocimiento de una conexión auxiliar entre las sucesiones y este principio.

El profesor también utiliza herramientas operacionales como los cambios de signos de las funciones cuadráticas, estableciendo de este modo una conexión transversal entre la resolución de la inecuación y la función cuadrática respecto a los cambios de signos que tiene una función cuadrática en una variable y la resolución de una inecuación cuadrática en una variable; ambos conceptos pueden ser pensados del mismo modo en que se piensan los signos del producto de dos números reales cualesquiera.

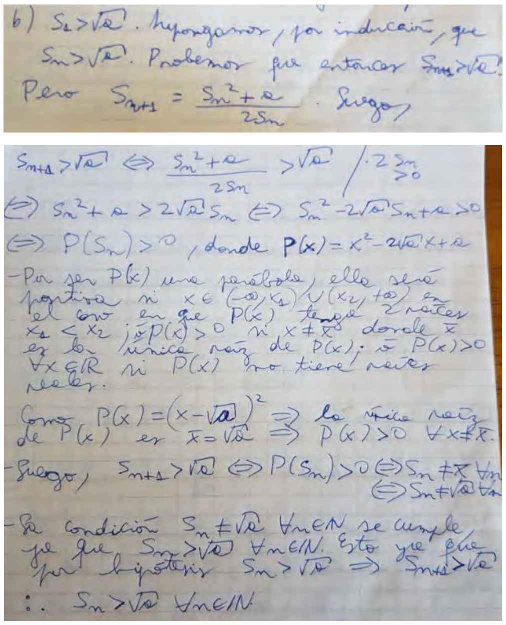


Imagen 2: Resolución parte *b*)

Transcripción Imagen 2:

b) Sea $s_1 > \sqrt{a}$. Supongamos, por inducción, que $s_n > \sqrt{a}$. Probemos que entonces $s_{n+1} > \sqrt{a}$.

Pero $s_{n+1} = \frac{{s_n}^2+a}{2s_n}$. Luego,

$s_{n+1} > \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} > \sqrt{a}\ \ /\cdot 2s_n > 0$

$\Leftrightarrow\ {s_n}^2 + a > 2\sqrt{a}\, s_n \Leftrightarrow\ {s_n}^2 - 2\sqrt{a}\, s_n + a > 0$

$\Leftrightarrow$ P$(s_n) > 0$, donde $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$

- Por ser $P(x)$ una parábola, ella será positiva si $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ en el caso en que $P(x)$ tenga 2 raíces $x_1 < x_2$; ó $P(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$ donde $\bar{x}$ es la única raíz de $P(x)$; ó $P(x) > 0$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$ si $P(x)$ no tiene raíces reales.

Como $P(x) = \left(x - \sqrt{a}\right)^2 \Rightarrow$ la única raíz de $P(x)$ es $\bar{x} = \sqrt{a}\ \Rightarrow P(x) > 0\ \forall x \neq \bar{x}$.

- Luego,

$s_{n+1} > \sqrt{a} \Leftrightarrow P(s_n) > 0 \Leftrightarrow s_n \neq \bar{x}\ \forall\ n$

$\Leftrightarrow s_n \neq \sqrt{a}\ \forall\ n$

- La condición $s_n \neq \sqrt{a}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ se cumple, ya que $s_n > \sqrt{a}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Esto ya que por hipótesis $s_n > \sqrt{a}\ \Rightarrow s_{n+1} > \sqrt{a}$

$\therefore s_n > \sqrt{a}\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Imagen 2: Resolución parte b) y transcripción.

De manera simultánea, se observa que la implementación de la inducción requiere del análisis de una función cuadrática y el estudio de sus raíces. La función cuadrática tampoco es parte del tema de sucesiones, pero, al igual que la inducción, presta ayuda en la demostración requerida. De esto se tiene otra conexión auxiliar entre la función cuadrática, sus raíces y la sucesión.

Para la resolución de ambas partes, a) y b), las herramientas y conexiones utilizadas evidencian un cambio de dominio del Análisis al Álgebra, ya que, partiendo de enunciados en el primer dominio, se resuelven las tareas en el segundo dominio.

Notemos que en la equivalencia $s_n^2 - 2\sqrt{a}\, s_n + a > 0 \Leftrightarrow P(s_n) > 0$, el profesor muestra una conexión de la desigualdad con la función cuadrática $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$, en donde se evalúa $P(x)$ en $x = s_n$, lo cual es posible dado que s_n es un número real. Alternativamente, el profesor podría haber realizado el estudio de los signos de la parábola en forma gráfica, sin embargo creemos que ha privilegiado el análisis en un contexto algebraico con el fin de resaltar la demostración por sobre la visualización, prefiriendo así la génesis discursiva por sobre la semiótica.

En las resoluciones de las partes c) y d), desde el ETM, el profesor continúa activando la génesis discursiva, pero esta vez sin recurrir a cambios de dominio. Asimismo, prevalece un trabajo guiado en el paradigma AC con elementos del paradigma AR, reflejados en las nociones involucradas (sucesiones monótonas y acotadas y convergencia). En la parte c), el profesor vuelve a utilizar los conectores lógicos para redactar el desarrollo. A pesar de que el profesor mezcla el lenguaje natural con la simbología matemática, se observa que conoce el rol de las implicaciones para comunicar los resultados y que las conclusiones de las dos partes anteriores le permiten concluir sobre el decrecimiento y acotamiento de la sucesión. Se observa que la construcción de este breve argumento se fundamenta en los resultados anteriores, por tanto, es muestra de conocimiento sobre las formas de construir una demostración.

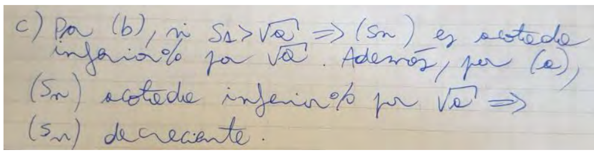


Imagen 3: Resolución pregunta *c*)

Transcripción Imagen 3:
Por (*b*), si $s_1 > \sqrt{a} \Longrightarrow (s_n)$ es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$. Además, por (*a*), (s_n) acotada inferiormente por $\sqrt{a}$
$\Longrightarrow (s_n)$ decreciente.

Imagen 3: Resolución parte c) y transcripción.

Por último, en la parte *d*) se destaca el uso de una herramienta teórica del referencial de las sucesiones, lo cual es considerado dentro del conocimiento del profesor sobre el tema.

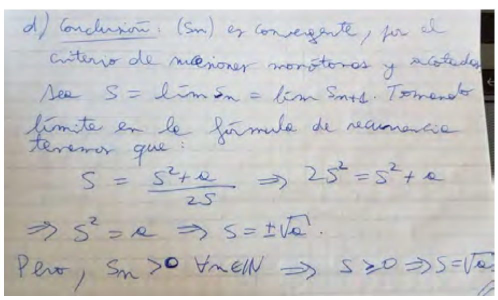


Figura 4: Resolución pregunta *d*)

Transcripción Figura 4:
Conclusión:
(s_n) es convergente, por el criterio de sucesiones monótonas y acotadas.
Seas $s = \text{lím}\, s_n = \text{lím}\, s_{n+1}$. Tomando límite en la fórmula de recurrencia tenemos que:

$$s = \frac{s^2 + a}{2s} \Longrightarrow 2s^2 = s^2 + a$$

$\Longrightarrow s^2 = a \Longrightarrow s = \pm\sqrt{a}$.
Pero, $s_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow s \geq 0 \Longrightarrow s = \sqrt{a}$

Imagen 4: Resolución parte d) y transcripción.

Además del conocimiento del profesor sobre los símbolos y conectores lógicos para la redacción de la demostración, se tiene en esta última parte que el profesor recurre a conocimientos sobre criterios de convergencia, propiedades del límite de una sucesión y la resolución de ecuaciones cuadráticas para resolver la tarea. Todos estos son conocimientos de temas diferentes: sucesiones y ecuaciones. En este caso, la resolución de la ecuación le sirve de herramienta para determinar el valor del límite de la sucesión y es considerado como conocimiento de una conexión auxiliar entre sucesiones y ecuaciones. Asimismo, en términos del ETM, se utiliza una herramienta teórica que permite pasar al límite en la fórmula de recurrencia, lo cual induce un trabajo que se enmarca en el paradigma AC, ya que se aplica la regla que dice que las sucesiones s_{n+1} y s_n convergen al mismo límite.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A partir de la combinación de elementos de ambos marcos teóricos fue posible dar una doble interpretación del conocimiento que pone en práctica y manifiesta el profesor al desarrollar una tarea en el tema de sucesiones. En efecto, a pesar de las diferencias en las orientaciones de cada marco, esta doble mirada sobre el uso de las propiedades, teoremas, procedimientos y simbologías nos permitió identificar tipos de conexiones y tipos de herramientas de manera simultánea.

Las evidencias aquí expuestas nos sugieren que las conexiones auxiliares están relacionadas con las herramientas operatorias. Debido a esta identificación desde ambas perspectivas, se puedo establecer que aquello que el profesor usaba al servicio del trabajo con sucesiones como una herramienta operatoria determinaba una conexión auxiliar con el tema de las sucesiones. El principio de inducción, la resolución de ecuaciones y las propiedades de ciertas funciones se identifican como herramientas y conexiones de manera simultánea.

Estos resultados revelan que en este uso de herramientas y el establecimiento de conexiones, el profesor acude a nociones de otro referencial. Esto indicó un cambio de dominio, del Análisis al Álgebra, sin ser necesariamente consciente el profesor de ello.

Cabe señalar, que cuando se habla de acotamiento implícitamente estamos pensando en un elemento del paradigma AR, pero al trabajar con conexiones auxiliares y transversales la actividad del docente se puede focalizar en un cambia de dominio. Se observa que el ETM distingue entre dos tipos de herramientas que el profesor utiliza en su desarrollo, mientras que el MTSK distingue tipos de conexiones entre conceptos. En nuestro análisis se pudo describir cómo el profesor utiliza las herramientas operatorias que dispone y que son parte de su conocimiento del tema de sucesiones o de otros temas, identificando cuál es el rol de ellas dentro de su conocimiento especializado. Esto atiende a la pregunta que guía nuestro trabajo y nos permite concluir que el análisis en conjunto ha posibilidad complementar los resultados obtenidos desde cada modelo, concretando la relación entre las herramientas del ETM y las conexiones interconceptuales contempladas en el MTSK. Esto último permite avanzar en el diálogo entre ambos marcos.

Por otro lado, el análisis de la resolución de la tarea nos conduce a pensar que un buen dominio de las herramientas, en el contexto del ETM y su relación con el conocimiento de las conexiones en el contexto del MTSK, cobra relevancia para el profesor al estructurar el ETM idóneo de modo que sus estudiantes logren abordar exitosamente la tarea. El conocimiento de estas conexiones involucra el dominio de contenidos anteriores o posteriores al actual, así como también saber cómo estos se conectan al momento de resolver una tarea.

Consideramos que la relación aquí presentada entre ambos marcos, ETM y MTSK, mostró, por una parte, que la tarea matemática sigue siendo un elemento que permite avanzar en la comprensión de dicha relación entre teorías (Espinoza-Vásquez, 2016) y, por otro lado, permite precisar el conocimiento sobre las conexiones entre temas para resolver una tarea, lo cual implica hacer uso de las herramientas teóricas y operacionales en esta resolución. Particularmente, las herramientas operatorias del ETM fueron asociadas con las conexiones auxiliares del KSM. Sin embargo, esto no significa que la relación entre estos dos conceptos (herramientas y conexiones) se limite a estos resultados, más bien harán falta otras investigaciones que describan otro tipo de relaciones entre las herramientas operacionales y teóricas con las conexiones consideradas en el KSM del MTSK.

Finalmente, consideramos que esta investigación se puede ampliar, por ejemplo, al estudio de la práctica del profesor durante la enseñanza de un objeto, cuando plantea tareas que pueden influenciar la actividad matemática del estudiante y así acercar el estudio del MTSK y de la actividad matemática del profesor al estudio del ETM personal del estudiante. Además, queda abierta la búsqueda de otras relaciones entre componentes específicos de ambos modelos de modo que se fortalezca el dialogo entre ellos.

REFERENCIAS

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, 2985–2994.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.) (2000). *The handbook of qualitative research*. London: Sage.

Espinoza-Vásquez, G. (2016). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 439–450). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M, y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON*, 4, 146-161.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema, 30*(54), 204–221.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2810-2819). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Philippe, R. y Vivier, L. (2016). Espacio de Trabajo Matemático. en I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, R. Philippe y L. Vivier (Orgs.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM*. Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema*, *30*(54), 1-22.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861–874. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, *17*(4.1), 17–26.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti, *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 3185-3194), Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema*, *30*(54), 222–239.

Verdugo-Hernández, P. (2017). *Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad.* (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: Valparaíso.

Zakaryan, D., Ribeiro, C. M., y Espinoza-Vásquez, G. (2016). Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal. En I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis y L. Vivier (Eds.), *Actas del Simposio Espacio de Trabajo Matemático 5* (pp. 467-475). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.